

Ballistische Kurven

T. Feldtmann

21. September 2012

A. Schräger Wurf ohne Luftwiderstand

Unter Vernachlässigung des Luftwiderstands erhält man eine parabelförmige Flugbahn mit der Gleichung

$$y(x) = y_0 + (\tan \alpha)(x - x_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}(x - x_0)^2. \quad (1)$$

Hierbei sind $(x_0|y_0)$ die Koordinaten des Abschusspunkts, v_0 die Abschussgeschwindigkeit, α der Abschusswinkel (relativ zur Horizontalen) und $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ die Beschleunigung beim freien Fall.

Eine Herleitung der Bahnkurve findet sich z.B. in jedem Physikbuch für die 11. Klasse oder an vielen Orten im Internet.

B. Schräger Wurf mit Stokes-Reibung

Wenn wir von einem kugelförmigen Flugobjekt mit Radius r ausgehen, wird die Stokes-Reibung durch die Kraft

$$\mathbf{F}_R = -6\pi r \eta \mathbf{v} \quad (2)$$

beschrieben, die der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ entgegen gerichtet ist. Dabei steht η für die Viskosität („Zähflüssigkeit“) des Mediums, das die Kugel durchquert.

Das angegebene Reibungsgesetz gilt nur für langsame Bewegungen, bei denen die Strömung um die Kugel herum laminar, d.h. frei von Verwirbelungen, bleibt. Für ballistische Kurven ist diese Annahme jedoch unrealistisch. Leider ist das Auftreten von Turbulenzen nur mit großem

numerischen Aufwand zu simulieren. Näherungsweise lässt sich in diesem Fall der Luftwiderstand durch die Newton-Reibung beschreiben, bei der die Reibungskraft nicht mehr proportional zu v , sondern zu v^2 ist. Da der schräge Wurf mit Stokes-Reibung mathematisch wesentlich einfacher zu behandeln ist, betrachten wir ihn trotzdem als erstes.

B.1. Gleichung der Bahnkurve

Wie im nächsten Abschnitt vorgerechnet, wird im Fall der Stokes-Reibung die Gleichung der Bahnkurve zu

$$y(x) = y_0 + \left(\tan \alpha + \frac{g}{\beta v_0 \cos \alpha} \right) (x - x_0) + \frac{g}{\beta^2} \ln \left[1 - \frac{\beta}{v_0 \cos \alpha} (x - x_0) \right] \quad (3)$$

mit dem Dämpfungsfaktor

$$\beta = \frac{6\pi r \eta}{m}, \quad (4)$$

wobei m für die Masse der Kugel steht.

Wenn man für η die Viskosität von Luft (weniger als $0,00002 \text{ kg/m sec}$) einsetzt, ergeben sich keine sichtbaren Abweichungen von der Parabelform des schrägen Wurfs im Vakuum. Für die Beispiele in der Datei `Beispiel_Stokes.pdf` habe ich deshalb die Viskosität von Glycerin ($1,48 \text{ kg/m sec}$) verwendet, das fast 100 000 mal zähflüssiger als Luft und immerhin etwa 1000 mal zähflüssiger als Wasser ist. Da es sich bei Glycerin um eine Flüssigkeit mit einer 1000 mal höheren Dichte als Luft handelt, darf hier die Auftriebskraft eigentlich nicht mehr vernachlässigt werden. In Abschnitt B.3 wird gezeigt, wie man den Auftrieb in der Rechnung berücksichtigen kann. Das Bild in `Beispiel_Stokes.pdf` demonstriert, wie der Auftrieb sich auf den Verlauf der Flugbahn auswirkt.

B.2. Herleitung

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für die Kugel lautet

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_R. \quad (5)$$

Der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$, die Gewichtskraft $\mathbf{F}_G$ und die Reibungskraft $\mathbf{F}_R$ haben die Komponenten

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{F}_G = m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{F}_R = -6\pi r \eta \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Zu lösen sind also die beiden gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\frac{dv_x}{dt} = -\beta v_x \quad \text{und} \quad (9)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\beta v_y - g, \quad (10)$$

wobei wir die Abkürzung $\beta = 6\pi r \eta / m$ eingeführt haben.

Die erste der beiden Differentialgleichungen lässt sich mit der Methode der Variablentrennung lösen. Wenn v_{0x} die horizontale Komponente der Anfangsgeschwindigkeit v_0 bezeichnet, erhalten wir

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{1}{\tilde{v}_x} d\tilde{v}_x = -\beta \int_0^t d\tilde{t} \quad (11)$$

$$\ln \frac{v_x}{v_{0x}} = -\beta t \quad (12)$$

$$v_x(t) = v_{0x} e^{-\beta t}. \quad (13)$$

Eine weitere Integration liefert uns die Weite x als Funktion der Zeit t :

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(\tilde{t}) d\tilde{t} = x_0 + \frac{v_{0x}}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \quad (14)$$

Die zweite der beiden Differentialgleichungen ist inhomogen. Ihre allgemeine Lösung

$$v_y(t) = v_{y,sp}(t) + v_{y,hom}(t) \quad (15)$$

setzt sich zusammen aus einer speziellen Lösung $v_{y,sp}$ und der allgemeinen Lösung $v_{y,hom}$ des homogenen Teils der Gleichung. Für letztere finden wir

analog zur obigen Rechnung $v_{y,\text{hom}}(t) = Ce^{-\beta t}$. Der Ansatz $dv_y/dt = 0$ führt sofort auf die spezielle Lösung $v_{y,\text{sp}} = -g/\beta$. Somit erhalten wir

$$v_y(t) = -\frac{g}{\beta} + Ce^{-\beta t}. \quad (16)$$

Die Anfangsbedingung $v_y(0) = v_{0y}$ legt die Integrationskonstante auf den Wert $C = v_{0y} + g/\beta$ fest. Also ist

$$v_y(t) = v_{0y}e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta} (1 - e^{-\beta t}). \quad (17)$$

Eine weitere Integration liefert y als Funktion der Zeit:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \int_0^t v_y(\tilde{t}) d\tilde{t} \\ &= y_0 + \frac{v_{0y}}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + \frac{g}{\beta^2} [(1 - e^{-\beta t}) - \beta t]. \end{aligned} \quad (18)$$

Um die Gleichung der Bahnkurve $y = y(x)$ aufzustellen, müssen wir die Variable t aus den Gleichungen (14) und (18) eliminieren. Indem wir Gleichung (14) verschieden weit auflösen, erhalten wir

$$(1 - e^{-\beta t}) = \frac{\beta}{v_{0x}}(x - x_0) \quad \text{bzw.} \quad (19)$$

$$-\beta t = \ln \left[1 - \frac{\beta}{v_{0x}}(x - x_0) \right]. \quad (20)$$

Diese Ausdrücke setzen wir nun in Gleichung (18) ein:

$$y - y_0 = \frac{v_{0y} + \frac{g}{\beta}}{v_{0x}}(x - x_0) + \frac{g}{\beta^2} \ln \left[1 - \frac{\beta}{v_{0x}}(x - x_0) \right]. \quad (21)$$

Wenn wir die Komponenten v_{0x} und v_{0y} der Anfangsgeschwindigkeit v_0 mit Hilfe des Abschusswinkels α ausdrücken,

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad (22)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha, \quad (23)$$

wird Gleichung (21) schließlich zu Gleichung (3).

B.3. Berücksichtigung des Auftriebs

Der (statische) Auftrieb ist durch die Archimedische Gleichung

$$\mathbf{F}_A = \rho_F V_K \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \quad (24)$$

gegeben. Hierbei bezeichnet ρ_F die Dichte der Flüssigkeit und $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$ das Volumen der Kugel. Wenn wir die Kraft $\mathbf{F}_A$ zur Bewegungsgleichung (5) hinzufügen, wird die Differentialgleichung für die vertikale Geschwindigkeitskomponente zu

$$\frac{dv_y}{dt} = -\beta v_y - g + \frac{\rho_F V_K}{m} g = -\beta v_y - g \left(1 - \frac{\rho_F}{\rho_K} \right), \quad (25)$$

während die Gleichung für die horizontale Geschwindigkeitskomponente v_x unverändert bleibt. Um den Auftrieb zu berücksichtigen, brauchen wir also in allen Gleichungen lediglich g durch die effektive Fallbeschleunigung

$$g^* = g \left(1 - \frac{\rho_F}{\rho_K} \right) \quad (26)$$

zu ersetzen.

C. Schräger Wurf mit Newton-Reibung

This section is under construction.